



CH IV — Application aux Fluides Parfaits Incompressibles

Nous allons appliquer les équations fondamentales de la dynamique des fluides au cas de fluides parfaits (non visqueux) et incompressibles.

1 - Equation de *Bernoulli*

Partons de l'équation fondamentale de la dynamique des fluides pour l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$

écoulement stationnaire
fluide parfait donc non visqueux

Si $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, alors on peut écrire : $\rho \vec{g} = -\nabla(\rho g z)$

Par ailleurs, on vérifie toujours l'égalité vectorielle suivante :

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{v})$$



Par conséquent :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla}(\rho g z)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2\right) + \vec{\nabla} p + \vec{\nabla}(\rho g z) = \rho \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z\right) = \rho \vec{v} \wedge \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{v})}_{2\vec{\Omega}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z\right) = 2\rho \vec{v} \wedge \vec{\Omega}$$

Si l'écoulement est irrotationnel : $\vec{\Omega} = \vec{0}$ et par conséquent :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z\right) = \vec{0}$$

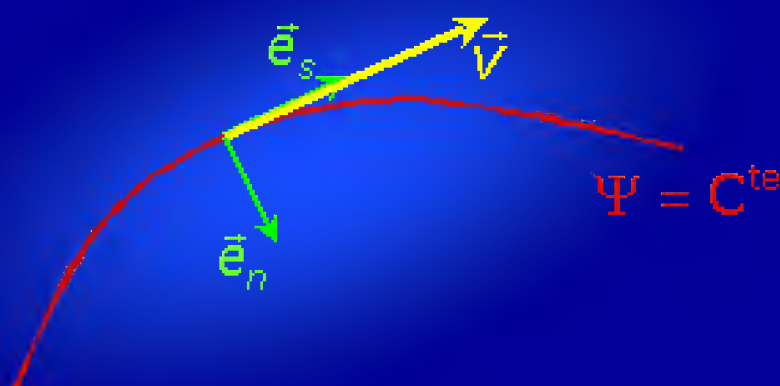
Donc : $\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z = C^{\text{te}}$

en tout point de l'écoulement
si celui-ci est **irrotationnel**.

Si l'écoulement n'est pas irrotationnel :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla}(\rho g z) = -\vec{\nabla}(\underbrace{p + \rho g z}_{p^*}) = -\vec{\nabla} p^*$$

p^* : pression matrice



Le long d'une ligne de courant, dans le repère de *Frenet* le vecteur vitesse s'exprime : $\vec{v} = v \vec{e}_s$

Dans ce même repère, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = (v \vec{e}_s) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s} \vec{e}_s \right) = v \frac{\partial}{\partial s}$$

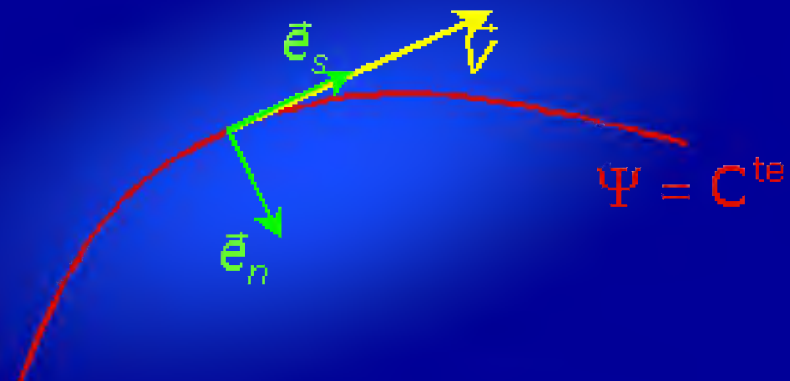
$$\text{D'où : } \rho v \frac{\partial}{\partial s} (v \vec{e}_s) = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \vec{e}_s - \frac{\partial p^*}{\partial n} \vec{e}_n$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + v \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + v \frac{\vec{e}_n}{R}$$

$$\text{Soit : } \rho v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{e}_s + \rho \frac{v^2}{R} \vec{e}_n = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \vec{e}_s - \frac{\partial p^*}{\partial n} \vec{e}_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p^*}{\partial s} \\ \rho \frac{v^2}{R} = -\frac{\partial p^*}{\partial n} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \rho v \frac{\partial v}{\partial s} = - \frac{\partial p^*}{\partial s} & \text{(i)} \\ \rho \frac{v^2}{R} = - \frac{\partial p^*}{\partial n} & \text{(ii)} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \rho v \frac{\partial v}{\partial s} &= \rho \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial s} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p^* \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g z \right) = 0 \end{aligned}$$

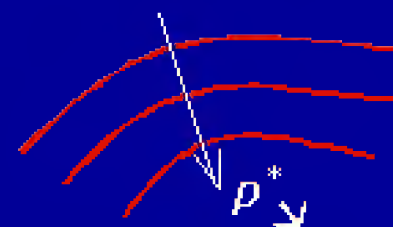
$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^te} \quad \text{le long d'une même ligne de courant.}$$

équation de Bernoulli

$$\text{(ii)} \quad \rho \frac{v^2}{R} = - \frac{\partial p^*}{\partial n} \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial n} < 0$$

La pression motrice diminue quand on se rapproche du centre de courbure.

Si les lignes de courants sont rectilignes et parallèles, alors la pression motrice reste constante dans la direction perpendiculaire.



2 - Interprétation de l'équation de *Bernoulli*

a) Interprétation en énergie

Multiplions tous les termes de l'équation de *Bernoulli* par un volume V :

$$p.V + \rho g z.V + \frac{1}{2} \rho v^2.V = C^{\text{te}} \times V$$

$p.V \Rightarrow$ travail des forces de pression : **énergie potentielle** due aux forces de pression.

$\rho g z.V = mgz \Rightarrow$ **énergie potentielle** due aux forces de pesanteur.

$\frac{1}{2} \rho v^2.V = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$ **énergie cinétique**.

$C^{\text{te}} \times V = E_m \Rightarrow$ énergie totale : **énergie mécanique**.

Par conséquent : $p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{E_m}{V}$ correspond à une

énergie mécanique par unité de volume (si $V=1$).

L'énergie mécanique reste alors constante le long d'une ligne de courant (il n'y a pas de dissipation d'énergie).

b) Interprétation en pression

$$p + \rho gZ + \frac{1}{2} \rho V^2 = C^{\text{te}}$$

$p \Rightarrow$ **pression statique**
(elle existe même s'il n'y a pas de mouvement)

$p + \rho gZ = p^* \Rightarrow$ **pression motrice**
(elle génère le mouvement)

$\frac{1}{2} \rho V^2 \Rightarrow$ **pression cinétique**
(elle résulte du mouvement)

$p + \rho gZ + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_t \Rightarrow$ **pression totale (ou charge)**

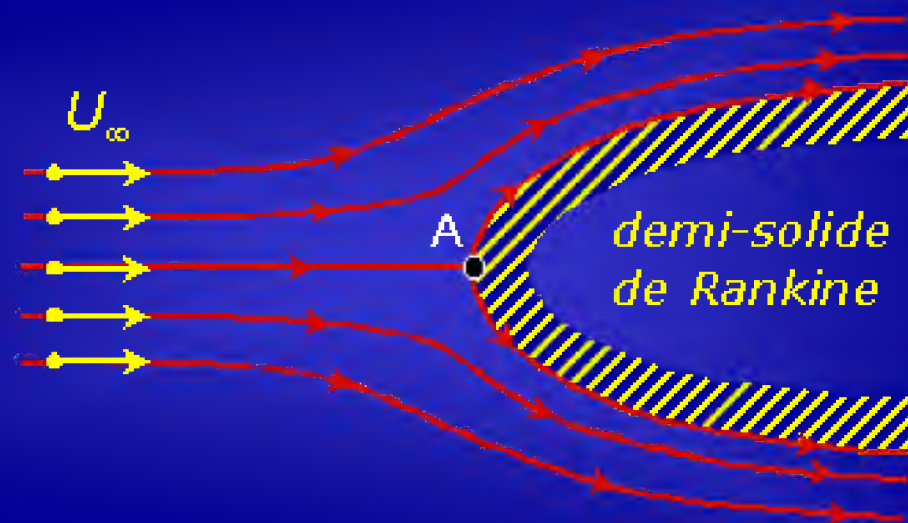
L'équation de *Bernoulli* montre alors que la charge reste constante le long d'une même ligne de courant
(\rightarrow pas de perte de charge dans l'écoulement d'un fluide parfait).

3 - Applications

a) Sondes de pression - Tube de Pitot

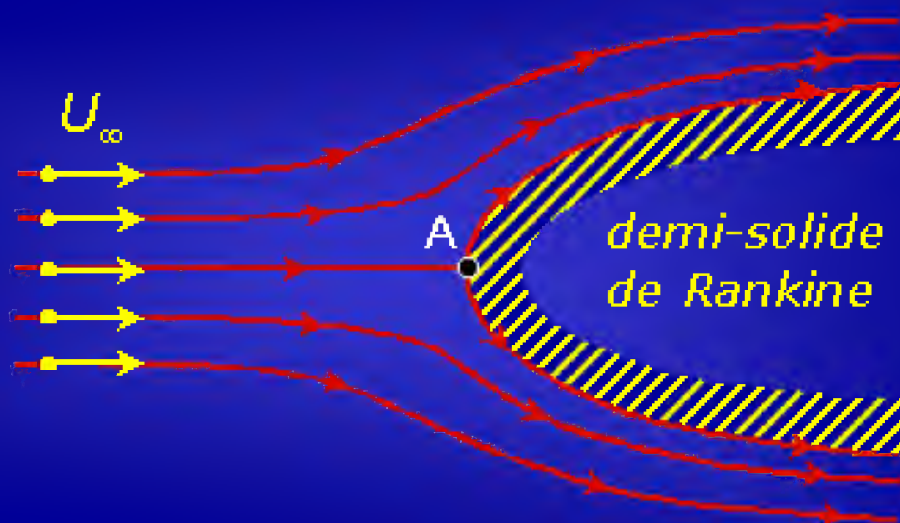
L'étude de la cinématique des écoulements a permis de montrer que des obstacles pouvaient générer un ou plusieurs point(s) d'arrêt.

Par exemple, la superposition d'un **écoulement uniforme** avec une **source** peut modéliser l'écoulement autour d'un objet appelé demi-solide de Rankine.



Ainsi, en amont de cet objet l'écoulement peut être considéré uniforme, de vitesse U_{∞} .

Un point d'arrêt A est généré sur le front d'attaque de l'objet.



Le long d'une même ligne de courant on vérifie :

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{te}$$

Considérons la ligne de courant passant par le point d'arrêt et appliquons *Bernoulli* entre le point A et un point situé loin en amont :

$$p_{\infty} + \rho g z_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 = p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2$$

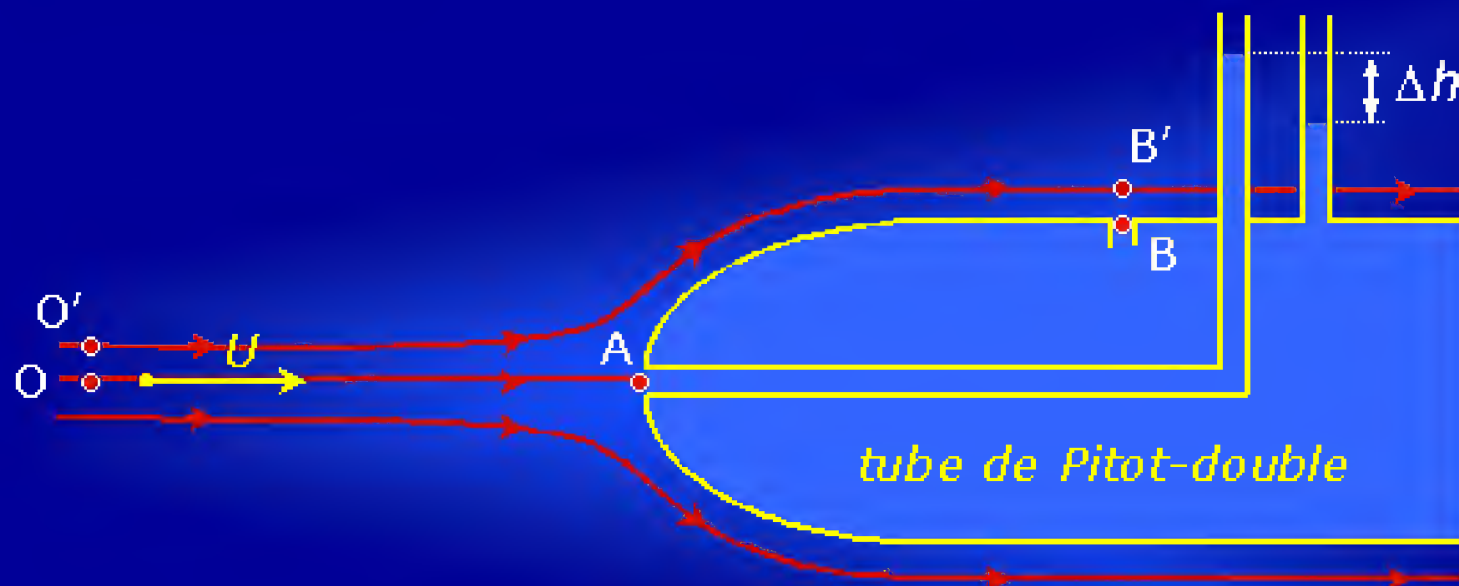
$\swarrow \quad \searrow$
 $U_{\infty}^2 \quad \quad \quad 0$

$$\Rightarrow p_{\infty} + \rho g z_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_A + \rho g z_A$$

Et si l'écoulement a lieu dans un plan tel que $z = C^{te}$, alors :

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = p_A$$

la pression p_A est ainsi appelée **pression de stagnation**.



En O et O', l'écoulement est supposé uniforme, de vitesse U .

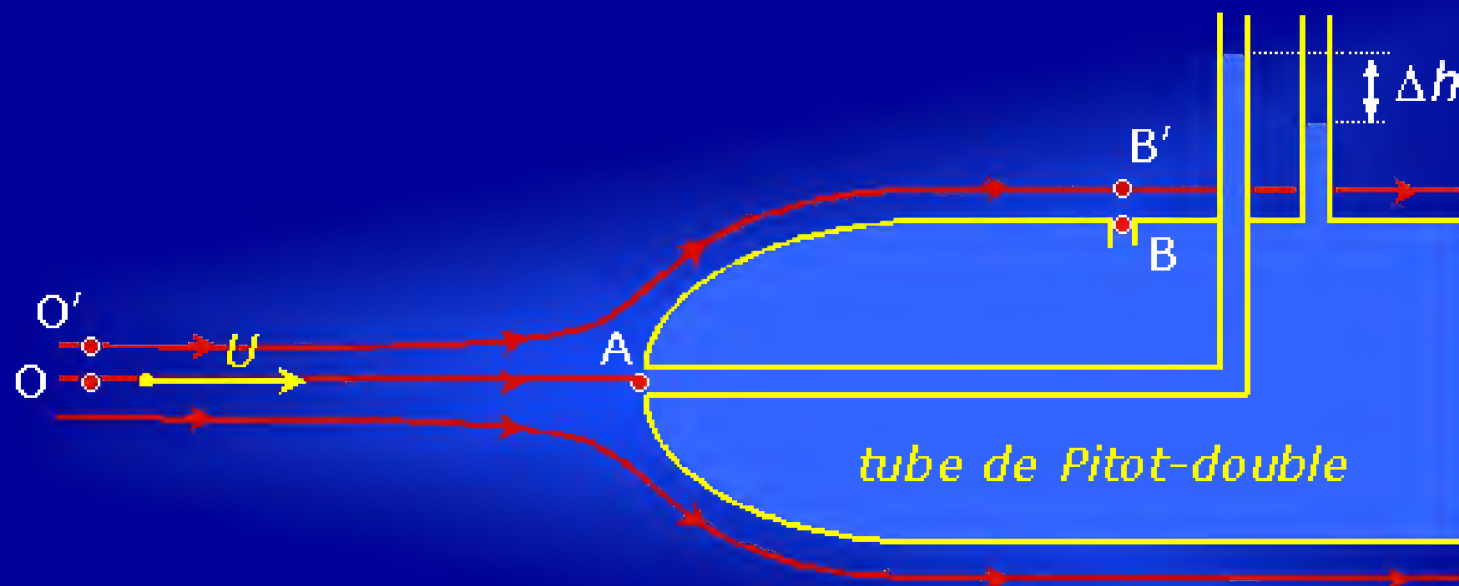
Les lignes de courant étant supposées rectilignes et parallèles, la pression est la même en O et O' $\Rightarrow p_O = p_{O'}$

Pour les mêmes raisons, la pression est la même en B et B' $\Rightarrow p_B = p_{B'}$

Le fluide étant immobile à l'intérieur de la sonde, la pression y est uniforme et égale à la pression en B.

\Rightarrow le premier manomètre donne la pression en A
 \Rightarrow le second manomètre donne la pression en B

$$p_A - p_B = \rho g \Delta h$$



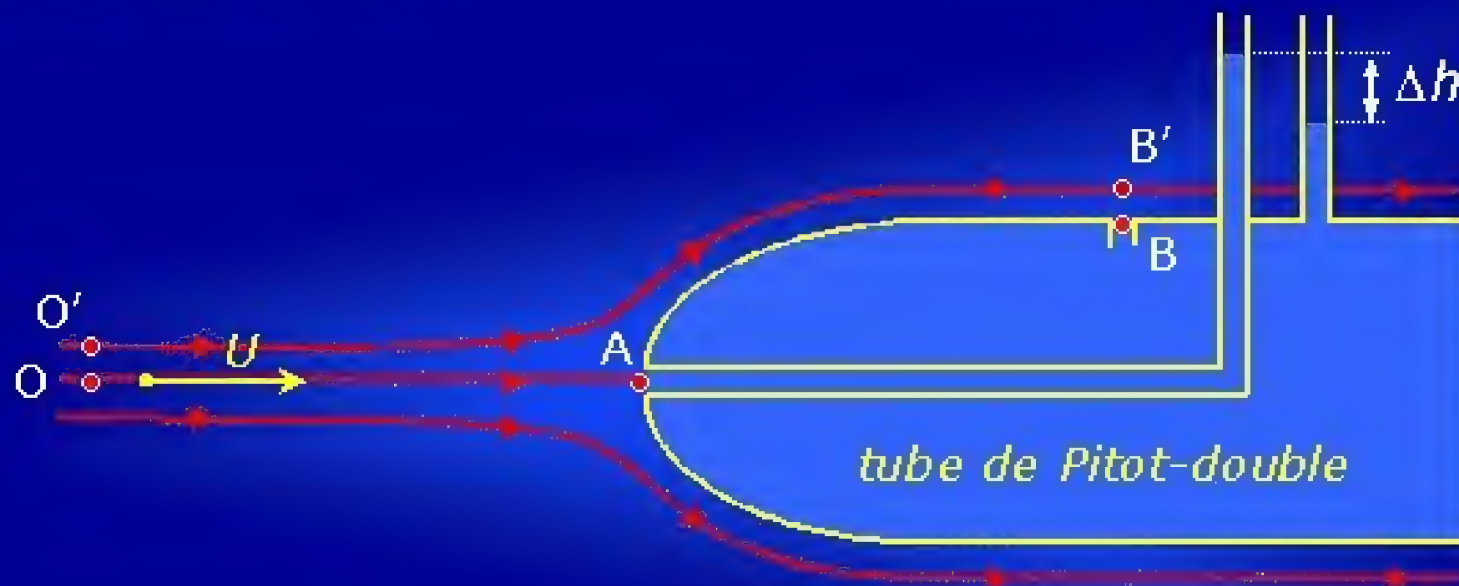
En appliquant *Bernoulli* entre O et A, on a : $p_O + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$

Puis entre O' et B' : $p_{O'} + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_{B'}^2$

On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement est redevenu uniforme loin après le front de l'objet : $v_{B'} = U$

D'où : $p_{O'} = p_{B'}$ Or, on a vu que : $p_{O'} = p_O$ et $p_{B'} = p_B$
 $\Rightarrow p_O = p_B$

Par conséquent : $p_B + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$



$$p_B + \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho U^2 = p_A - p_B = \rho g \Delta h$$

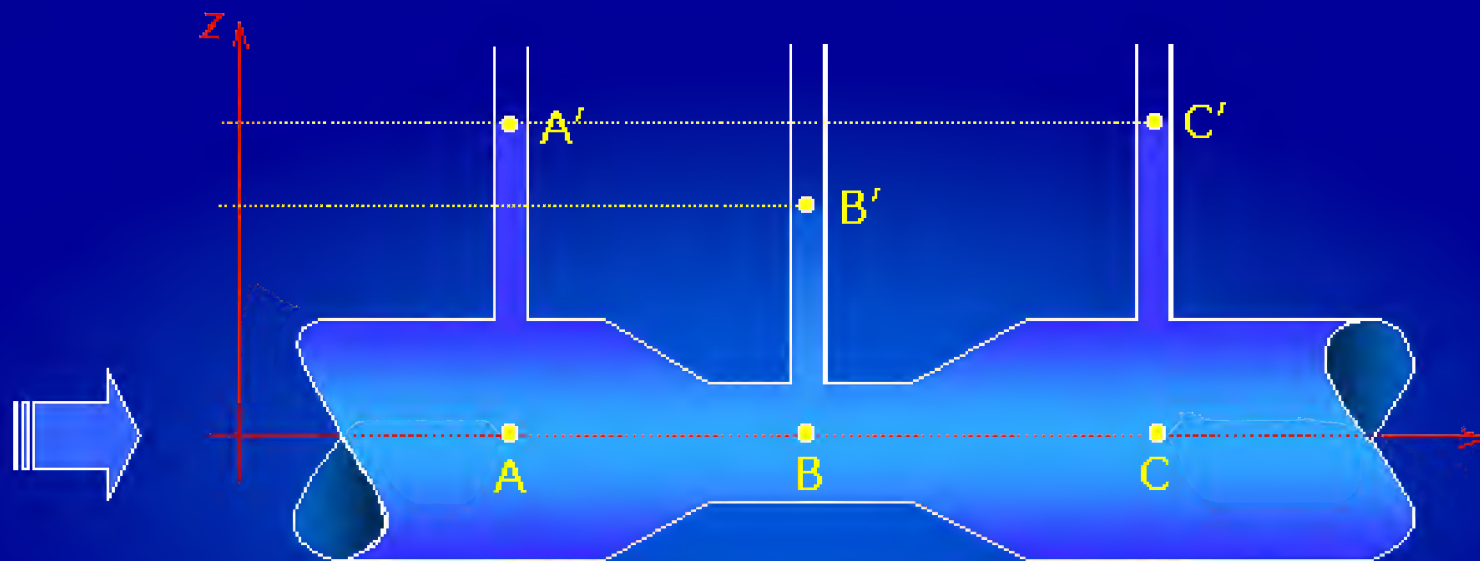
$$\Rightarrow U = \sqrt{2g\Delta h}$$

différents types de sondes de
Prandtl (tubes de Pitot-doube)



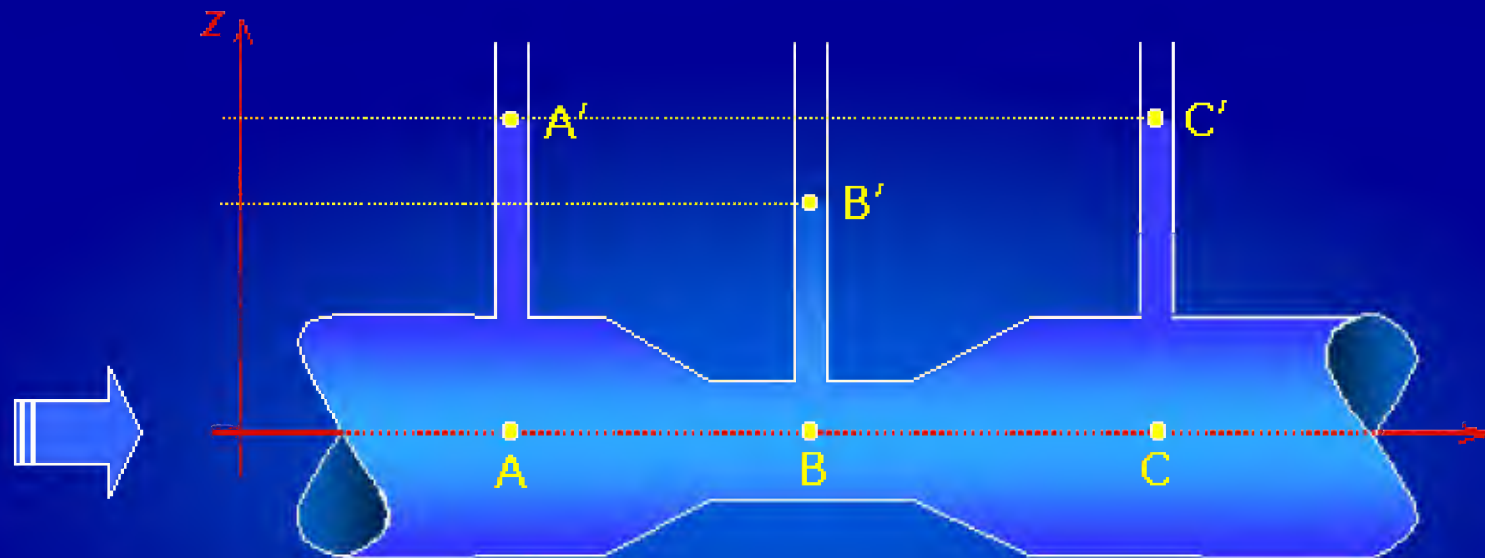
b) Phénomène de *Venturi* - Mesure de débit

Considérons une conduite le long de laquelle a été placé un rétrécissement :



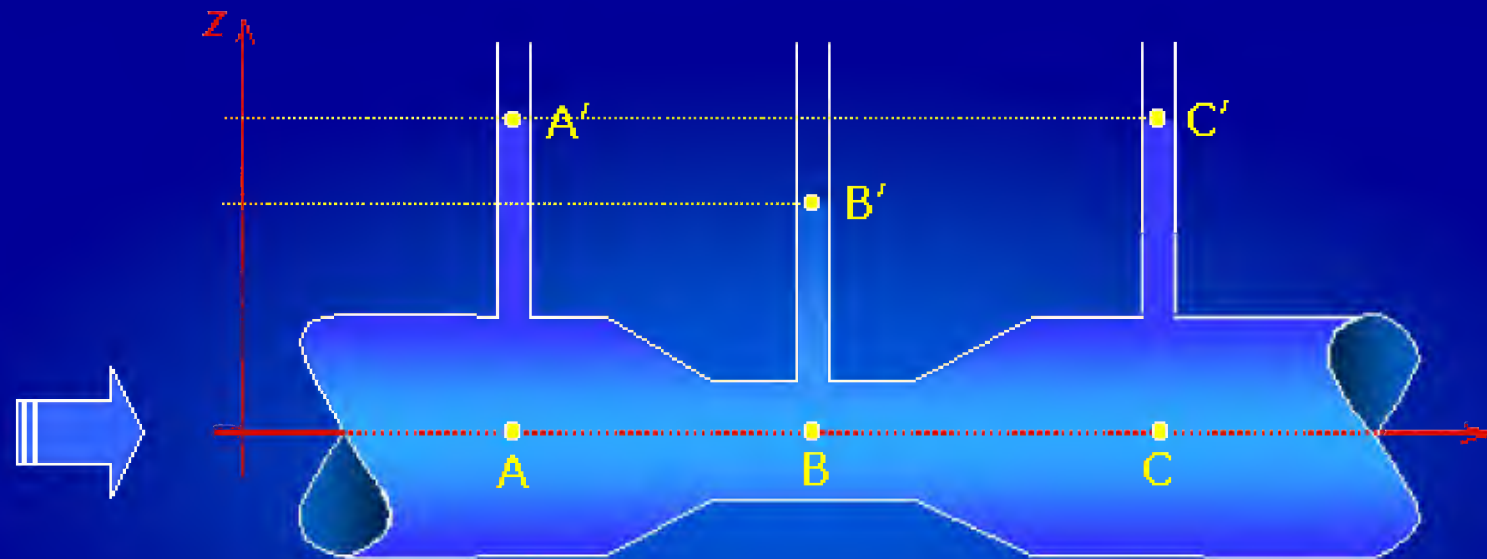
On dispose de 3 sondes de pression (manomètres) placées :

- ✕ en amont du rétrécissement $\Rightarrow p_A$
- ✕ au niveau du rétrécissement $\Rightarrow p_B$
- ✕ en aval du rétrécissement $\Rightarrow p_C$ (*sonde facultative*)



En dessous chaque prises de pression, les lignes de courant peuvent être considérées rectilignes et parallèles : dans la direction perpendiculaire (suivant z) les lois de l'hydrostatique s'appliquent à la pression :

$$\begin{cases} p_A = p_{A'} + \rho g z_{A'} \\ p_B = p_{B'} + \rho g z_{B'} \\ p_C = p_{C'} + \rho g z_{C'} \end{cases} \quad \text{où } p_{A'} = p_{B'} = p_{C'} = p_{\text{atm}}$$



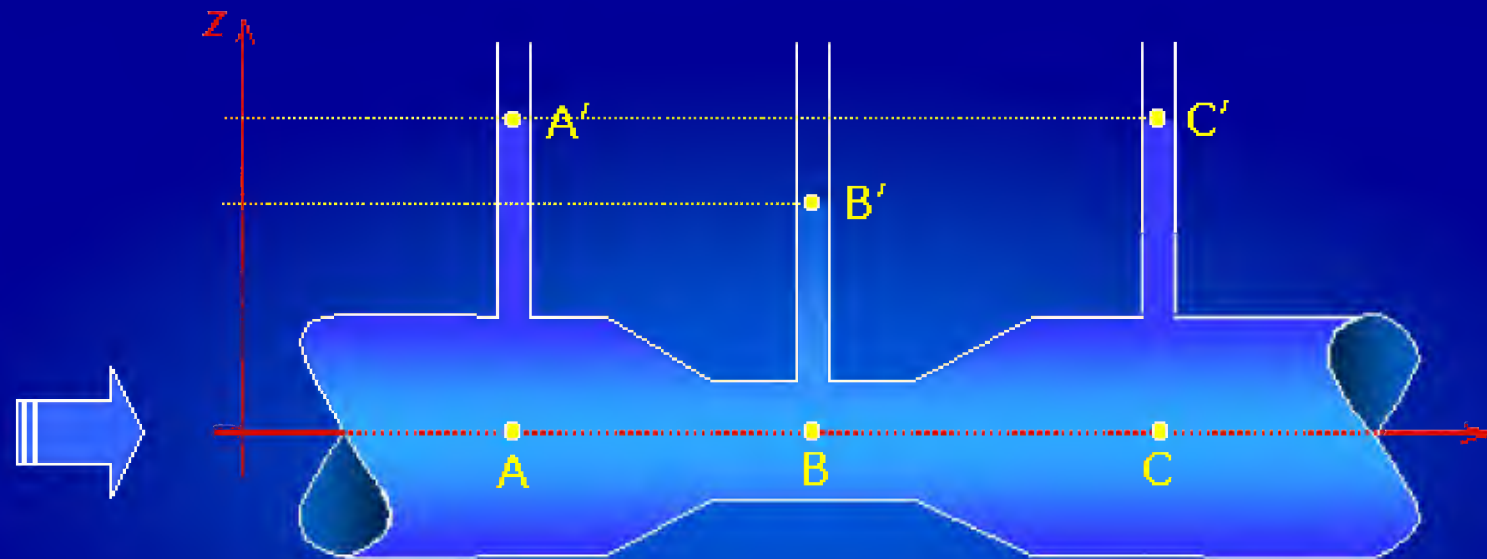
Appliquons *Bernoulli* sur la ligne de courant passant par A, B et C :

$$p_A + \cancel{\rho g z_A} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \cancel{\rho g z_B} + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_C + \cancel{\rho g z_C} + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$$z_A = z_B = z_C = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{p_{atm}} + \cancel{\rho g z_{A'}}}_{p_A} + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \cancel{p_{atm}} + \rho g z_{B'} + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = \cancel{p_{atm}} + \rho g z_{C'} + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$$\Rightarrow z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2} \frac{v_C^2}{g}$$



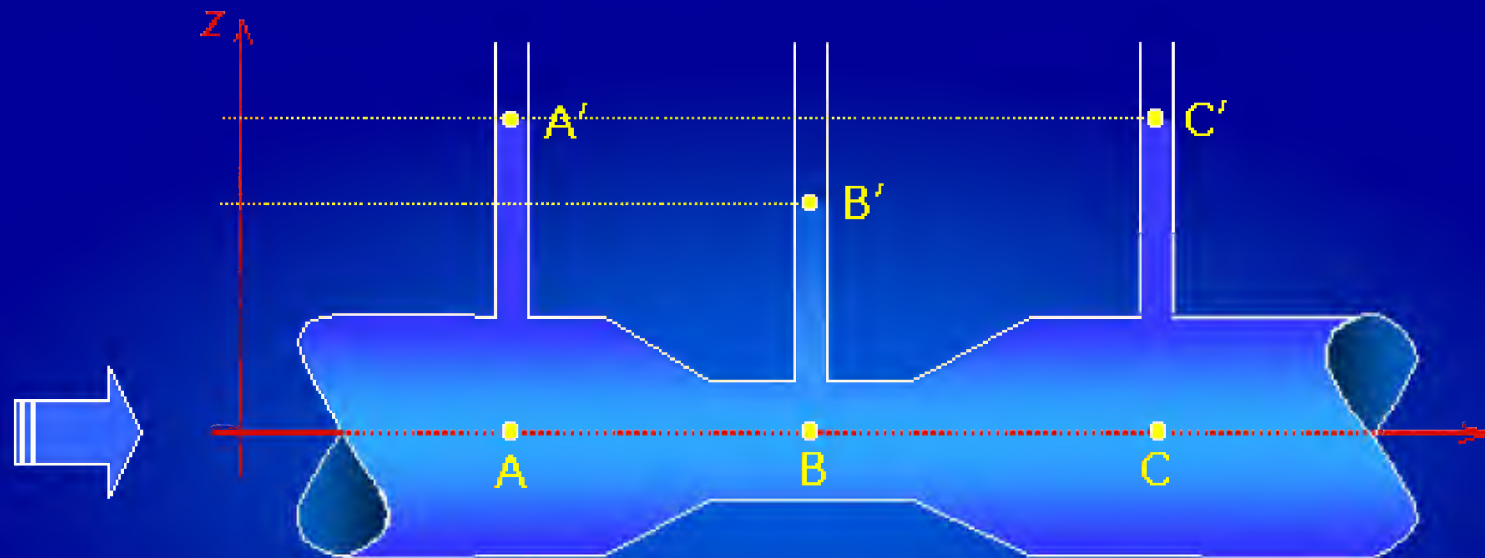
$$z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} = z_{C'} + \frac{1}{2} \frac{v_C^2}{g}$$

On sait par ailleurs que le débit volumique est conservé :

$$q_v = S_A v_A = S_B v_B = S_C v_C \quad (\text{en supposant la vitesse uniforme sur une même section})$$

Remarquons que : $S_A > S_B \Rightarrow v_A < v_B \Rightarrow z_{A'} > z_{B'}$
 (rétrécissement) (accélération) (dépression)

et que si $S_A = S_C$ alors $v_A = v_C$ et $z_{A'} = z_{C'}$: la 3^{ème} sonde ne servira que pour une étude des pertes de charge (cf CH V)



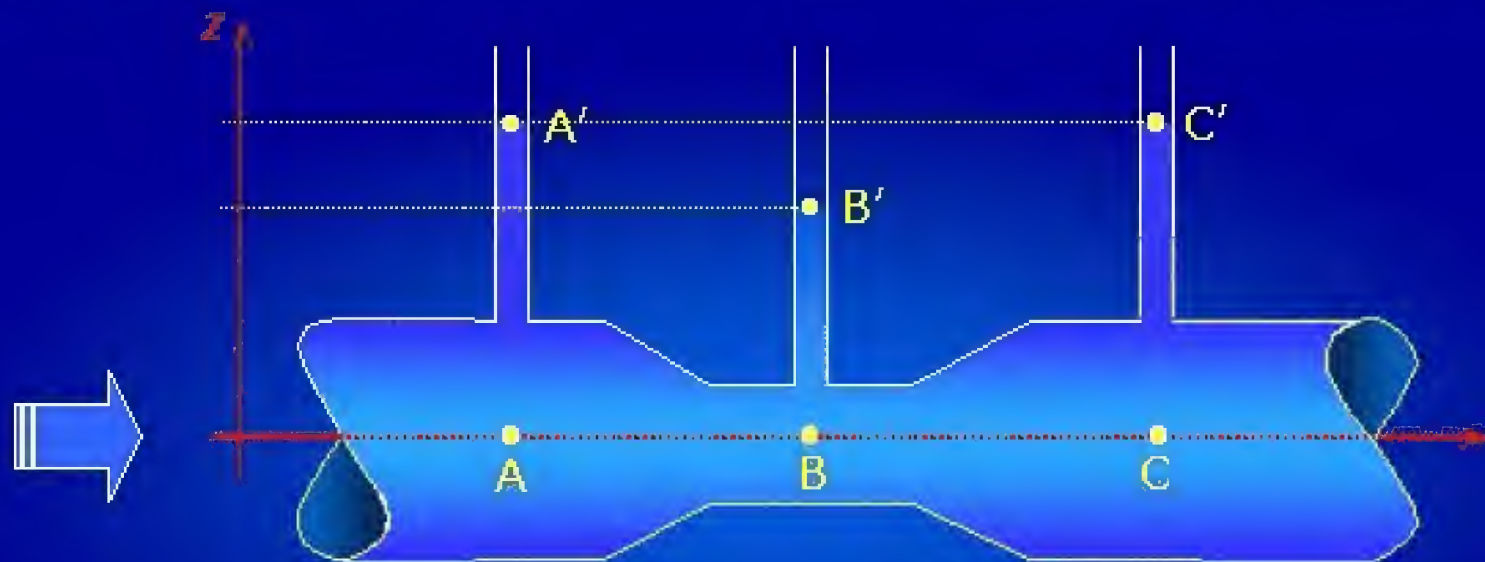
$$z_{A'} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} = z_{B'} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta z = z_{A'} - z_{B'} = \frac{1}{2g} (v_B^2 - v_A^2)$$

$$S_A v_A = S_B v_B \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A \frac{S_A}{S_B}$$

$$\text{Donc : } \Delta z = \frac{1}{2g} v_A^2 \left(\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) \quad \text{soit : } v_A = \sqrt{\frac{2g\Delta z}{\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}}$$

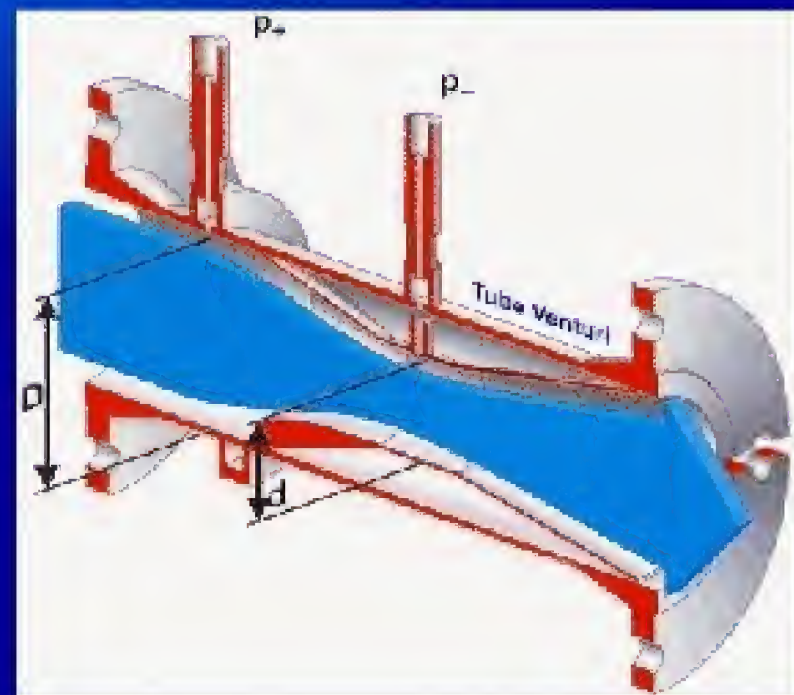
Le débit dans la conduite s'obtient par :

$$q_v = S_A \sqrt{\frac{2g\Delta z}{\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1}}$$



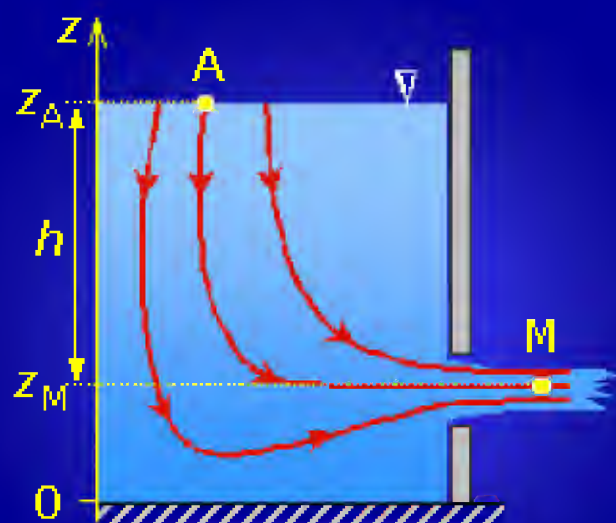
Exprimé en fonction du diamètre D de la conduite et du diamètre d du rétrécissement, le débit s'exprime :

$$q_v = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta z}{(D/d)^4 - 1}}$$



c) Ecoulement par orifice - Formule de Torricelli

Considérons la vidange d'un réservoir par un orifice placé sous la surface libre :



Appliquons *Bernoulli* entre un point A de la surface libre et un point M du jet :

$$p_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_M + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2$$

Hypothèse : dans le jet, les lignes de courant sont rectilignes parallèles, donc dans la direction transverse on peut y appliquer les lois de l'hydrostatique. Les variations d'altitude étant négligeables, **la pression statique** peut alors être considérée **uniforme dans tout le jet**.

Comme il n'y a pas de discontinuité de pression à l'interface jet-atmosphère, **la pression statique dans le jet est égale à la pression atmosphérique**.

Par conséquent : $p_A = p_M = p_{\text{atm}}$

$$\begin{aligned}
 \cancel{p_A} + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 &= \cancel{p_M} + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2 \\
 \textcolor{red}{p_{atm}} &\quad \textcolor{red}{p_{atm}} \quad \Rightarrow \quad \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho v_M^2
 \end{aligned}$$

Hypothèse : la vitesse de descente du niveau de la surface libre peut être considérée négligeable devant celle du fluide s'écoulant dans le jet.

$$\Rightarrow v_A \ll v_M$$

Par conséquent :

$$\underbrace{\rho g(z_A - z_M)}_h = \frac{1}{2} \rho(v_M^2 - v_A^2) \approx \frac{1}{2} \rho v_M^2$$

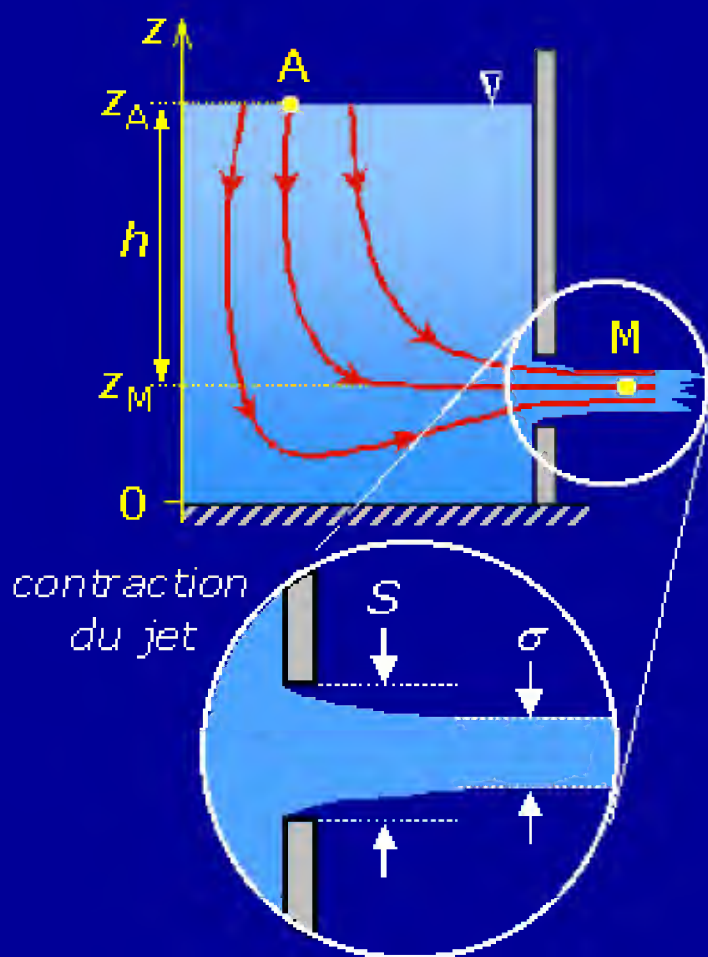
$$\Rightarrow v_M = \sqrt{2gh}$$

formule de Torricelli

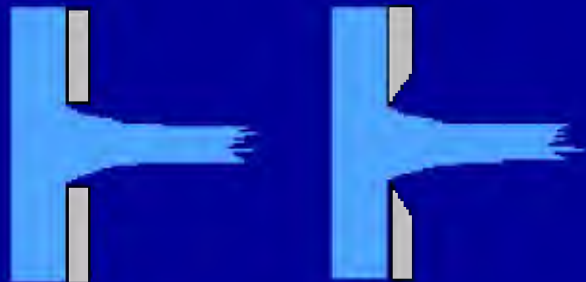
Calcul du débit :

$$q_v = \sigma v_M = \sigma \sqrt{2gh} \quad \text{où} \quad \sigma = \textcolor{blue}{C_c} S$$

coefficient de contraction



Le coefficient de contraction dépend de la géométrie de l'orifice.
De manière générale, C_c est déterminé expérimentalement et tabulé :



parois minces $C_c = 0,61$



orifice à bords profilés $C_c = 1,00$



orifice à bords rentrants $C_c = 0,50$

d) Phénomène de cavitation

Le phénomène de cavitation correspond à la **formation de bulles de vapeur** au sein d'un liquide en mouvement.

En conséquence de l'équation de *Bernoulli*, quand la vitesse augmente la pression diminue. Si pression tombe en dessous de la **pression de vapeur saturante**, alors le liquide s'évapore \Rightarrow formation de bulles.

En pratique, et dans la plupart des cas, ce phénomène est gênant.
Par exemple :

- ✗ la cavitation est consommatrice d'énergie

énergie consommée pour la formation des bulles (transition de phase)
+ contraintes

- ✗ la cavitation est à l'origine de la détérioration prématurée des hélices de navires

Les bulles créées par cavitation migrent spontanément vers les zones où la pression du fluide est plus élevée : elles éclatent et le choc mécanique engendre des détériorations.

